Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Інженерно-технічний факультет

Кафедра комп’ютерних систем та мереж

**Лабораторна робота №3**

**ОБЧИСЛЕННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛУ**

Студента 4-го курсу

Гула Б. Ю.

Ужгород – 2012

**МЕТА РОБОТИ**

Дослідити дискретне перетворення Фур’є (ДПФ) і алгоритм швидкого перетворення Фур’є (ШПФ) за основою два як засіб ефективного обчислення спектральних характеристик сигналів, а також фільтрації і апроксимації сигналів.

**ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

**Прямим та оберненим дискретним перетворенням Фур’є** (ДПФ) називають пару взаємооднозначних лінійних перетворень виду (1), (2)

, (пряме) (1)

, (обернене) (2)

де ,.

Пряме дискретне перетворення Фур’є (1) призначено для виконання Фур’є - аналізу, тобто визначення спектральних компонентів (складових)  сигналу . Обернене перетворення Фур’є (2) забезпечує Фур’є - синтез сигналу  за заданим набором спектральних компонентів . У загальному випадку послідовності  і  - комплексні. Якщо ж  - дійсна послідовність, то  є комплексно спряженою: , , . Для дійсних сигналів спектральні компоненти з номерами  відповідають від’ємним частотам і не мають фізичного змісту.

**Швидким перетворенням Фур’є** (ШПФ) називають групу алгоритмів, що суттєво зменшують обчислювальні затрати при обчисленні прямого чи оберненого перетворень у порівнянні з безпосереднім способом, що ґрунтується на формулах (1) чи (2). Серед відомих алгоритмів ШПФ найпростішу структуру має алгоритм Кулі - Тьюкі за основою два (ШПФ2). Його основна ідея полягає в рекурсивному (при ) зведенні -точкових () перетворень до двох -точкових. При часовому проріджені для цього застосовується формула розкладу:

 (3)

де , , . Якщо обчислюється - точкове перетворення комплексної послідовності, то кількість операцій комплексного множення  і додавання  в алгоритмі ШПФ рівні:, . У порівнянні з безпосереднім способом обчислення перетворень (1) чи (2), який потребує  комплексних множень і  комплексних додавань, обчислювальні затрати суттєво скорочуються - приблизно в  раз (наприклад, при кількість комплексних множень зменшується в 372 рази).

Крім ноpмуючого постійного множника , в оберненому ДПФ є комплексно-спряжені повертаючі множники. Для розробки алгоритму швидкого оберненого ДПФ використовуємо рівність  = , що отримується з (2) в результаті операції комплексного спряження. Інакше кажучи, для обчислення оберненого ДПФ послідовності  за допомогою алгоритму прямого ШПФ достатньо: знайти комплексно спряжену послідовність ; обчислити її пряме ДПФ - ; виконати операції комплексного спряження і множення на нормуючий множник отриманої послідовності: \* .

**Спектральний аналіз неперіодичних сигналів**. Для неперіодичного сигналу  спектральне представлення описується парою інтегральних перетворень

, (пряме), (4)

. (обернене). (5)

При цьому має місце рівність Парсеваля :

. (6)

Нехай  для  і  і одночасно  для . Покладемо , , . Тоді для наближеного обчислення  з виразу (4), використовуючи формулу чисельного інтегрування прямокутників, отримуємо вираз (7)

, . (7)

Таким чином, для обчислення спектру неперіодичного сигналу  (з кроком  у смузі ()) можна використати формулу ДПФ і, як наслідок, алгоритм ШПФ. Для підвищення роздільної здатності (зменшення  в  раз) потрібно фактично чи формально (для фінітних сигналів, що рівні нулю при ) збільшити  (в  раз), доповнивши послідовність  нульовими відліками:  при  і  при . Для розширення смуги аналізу в  раз зменшуємо  (збільшуємо в  раз ).

**Спектральний аналіз періодичних сигналів**. Нехай - періодичний сигнал з періодом , тобто для довільних  і ,  має місце рівність: . Якщо сигнал  описується неперервною або кусочно-неперервною функцією, то його можна подати у вигляді ряду Фур’є

, (8)

, (9)

де - основна гармоніка.

Коефіцієнти  називають ***частотним спектром***,  - ***амплітудним спектром***,  - ***фазовим спектром*** періодичного сигналу . Нехай , . Співставлення виразів (1) і (9) засвідчує, що пряме ДПФ наближає (за формулою чисельного інтегрування прямокутників) коефіцієнти розкладу сигналу в ряд Фур’є: , .

Рівність Парсеваля тут має вигляд: .

При збільшенні , тобто зменшенні , похибка методу такого представлення зменшується. Аналогічне твердження має місце і при оберненому перетворенні, тобто наближенні сигналу відрізком ряду Фур’є, коли обмежуються границі сумування в (8).

**Фільтрація сигналів**. Математично процес фільтрації полягає у перетворенні спектру сигналу у відповідності з заданою функцією, що визначає спектральну характеристику фільтра. Приклади найпростіших фільтрів:

1). Ідеальний фільтр нижніх частот, котрий гасить (обнулює) спектральні компоненти для ;

2). Смуговий фільтр, котрий гасить компоненти, що розташовані поза деякою смугою. При цьому навіть наближене зберігання енергетичних залежностей за рівністю Парсеваля тут не вимагається.

**Апроксимація сигналів**. Апроксимація сигналів на основі перетворення Фур’є є частковим випадком фільтрації і полягає у селекції тільки частини коефіцієнтів ряду Фур’є (спектральних компонент), у котрих зосереджена необхідна (для забезпечення заданої точності апроксимації) частина енергії сигналу.

**ЗАВДАННЯ**

**Варіант 3**:

Сигнал задано таким чином



6 є [7..14];

-3 є [0..7].

**2. Текст програми:**

clc

clear all

close all

A=6; B=-3; c=7; f=7; g=14;

T=g;

m=7;N=2^m;

p=N/8;k1=N/2-p; k2=N/2+p;

dt=T/N;

t=0:dt:T-dt;

t11=[t(1:N/2)];

t12=[t(N/2+1:N)];

x11=A\*t11;

x12=B\*t12;

x=[x11 x12];

dw=2\*pi/T;

w=0:dw:N\*dw-dw;

Sx = fft(x, length(x))/(N);

subplot(3,1,1), plot(t, x), title('Input data - x(n)');

subplot(3,1,2), plot(w, real(Sx)), title('Real part FFT');

subplot(3,1,3), plot(w, imag(Sx)), title('Imag part FFT');

Sx1 = [Sx(1 : k1) zeros(1, k2 - k1) Sx(k2 + 1 : N)];

Sx2 = [zeros(1, p) Sx(p+1 :N-p) zeros(1, p)];

Sx3 = [Sx(1 : N/4-p/2),zeros(1, p),Sx( (N/4+p/2)+1:3\*N/4-p/2), zeros(1, p), Sx(3\*N/4+p/2+1:N)];

Sx4 = [zeros(1, N/4-p/2),Sx((N/4-p/2)+1 :N/4+p/2), zeros(1, N/2-p), Sx(3\*N/4-p/2+1:3\*N/4+p/2),zeros(1,N/4-p/2)];

figure(2)

subplot(5,2,1),plot(w, abs(Sx)), title('Spectral amplitudes X(k)');

subplot(5,2,3),plot(w, abs(Sx1)),title('Modify spectral amplitudes Xm1(k)');

subplot(5,2,5),plot(w, abs(Sx2)),title('Modify spectral amplitudes Xm2(k)');

subplot(5,2,7),plot(w, abs(Sx3)),title('Modify spectral amplitudes Xm3(k)');

subplot(5,2,9),plot(w, abs(Sx4)),title('Modify spectral amplitudes Xm4(k)');

x1= N\*ifft(Sx,length(Sx));

xm1= N\*ifft(Sx1, length(Sx1));

xm2= N\*ifft(Sx2, length(Sx2));

xm3= N\*ifft(Sx3, length(Sx3));

xm4= N\*ifft(Sx4, length(Sx4));

subplot(5, 2, 2), plot(t, x1), title('Output signal x1(n)');

subplot(5, 2, 4), plot(t, real(xm1)), title('Output signal xm1(n)');

subplot(5, 2, 6), plot(t, real(xm2)), title('Output signal xm2(n)');

subplot(5, 2, 8), plot(t, real(xm3)), title('Output signal xm3(n)');

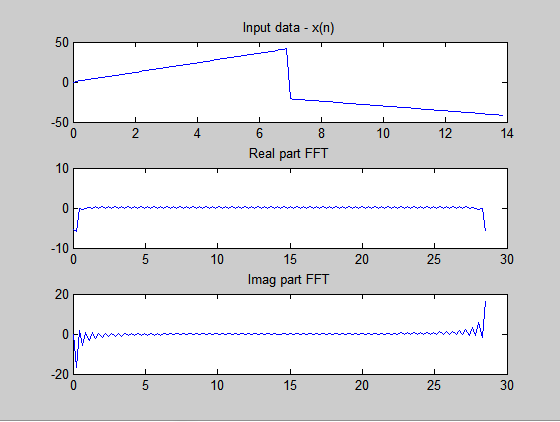
subplot(5, 2, 10), plot(t, real(xm4)), title('Output signal xm4(n)');

onePr=100/(N\*max(abs(A),abs(B)));

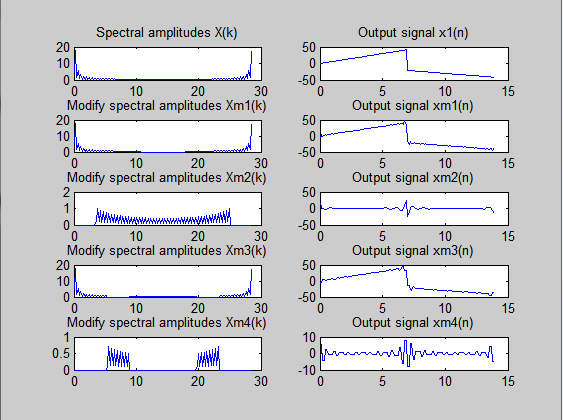
bm1=onePr\*(sum(abs(x-xm1))),bm2=onePr\*(sum(abs(x-xm2)))

bm3=onePr\*(sum(abs(x-xm3))),bm4=onePr\*(sum(abs(x-xm4)))

**3. Графіки вхідної послідовності для 128 точок та її частотного спектру**



**4,5. Графіки амплітудних спектрів та відновлених сигналів (для *р =N/8*)**



**6. Значення середніх похибок відновлених сигналів (у відсотках)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **N =128** | **ε (xm1), %** | **ε (xm2), %** | **ε (xm3), %** | **ε (xm4), %** |
| p=N/4=32 | 21.5486 | 431.7872 | 37.1251 | 430.0022 |
| p=N/8=16 | 15.2369 | 429.0701 | 26.2501 | 432.3754 |

**Висновок**

В даній лабораторній роботі отримано спектральну характеристику заданого періодичного сигналу. Це зроблено засобами системи MATLAB, а саме, шляхом використання вбудованої функцій fft(), яка дозволяє обчислювати швидке перетворення Фур’є N - точкової послідовності. Графік частотного складу сигналу приведено в п. 3.

Крім того, проводилась частотна фільтрація сигналу, тобто відкидання різних частин спектральних коефіцієнтів, а далі - відновлення сигналу за допомогою оберненого швидкого перетворення Фур’є.

Як показало дослідження, при відкиданні спектральних складових, що відповідають за високі частоти, відтворений сигнал спотворюється незначно, тоді як відкидання низькочастотної складової приводить до повної втрати початкового сигналу, за винятком точки перепаду амплітуди. Тому, для апроксимації заданого сигналу слід використовувати лише низькочастотну складову.